EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

VIII — 1 MEI 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

IN MEMORIAM PROF. DR. E. W. BETH

Hoewel Beth aan de universiteit te Utrecht wiskunde gestudeerd heeft, moeten we hem toch in zekere zin een autodidact noemen. Op het gebied, dat zijn speciale belangstelling had, de logica en het grondslagenonderzoek, heeft hij zich geheel alleen moeten bekwamen. Op snelle en voortreffelijke wijze is hem dit gelukt. Zijn studie heeft hij afgesloten met een dissertatie op mathematisch-filosofisch gebied over: Rede en aanschouwing in de wiskunde (1935).

Dit was slechts het begin van een briljante carrière. Vanaf 1940 volgden de boeken en kleinere publikaties elkaar in steeds snellere vaart op. Zijn kennis op het gebied van het grondslagenonderzoek werd vrijwel universeel. Zijn reputatie bleef niet beperkt binnen onze grenzen, doch hij verwierf een wereldnaam. Zijn werkkracht grensde aan het ongelooflijke, waarbij ik niet nalaten wil de steun van zijn vrouw te vermelden, die het hem mogelijk maakte zich ten volle te ontplooien.

Ondanks zijn enorme wetenschappelijke activiteit, heeft hij voor het onderwijs een warme belangstelling gehouden, stellig ook door het voorbeeld, dat zijn vader hem gegeven heeft. Hij was medewerker van Euclides en schreef verschillende artikelen, o.a. in de 34e jaargang een uiteenzetting van de door hem uitgevonden methode van de semantische tableaus.

De laatste jaren werd zijn toch al niet sterke gezondheid steeds slechter. Een tijdelijk herstel deed de hoop op voortzetting van zijn werk herleven. Het heeft niet zo mogen zijn; op 12 april kwam aan dit welbestede leven een einde. We mogen Beth dankbaar zijn voor alles, wat hij gedaan heeft voor de ontwikkeling van de hem zo dierbare logica en voor het feit, dat moeite hem nooit te veel was deze kennis aan anderen over te dragen.

P. G. J. VREDENDUIN

$\sin(\alpha + \beta)$

door

P. WIJDENES
(Amsterdam)

§ **1.** Dit artikeltje bedoelt na te gaan, op welke wijzen de formules voor $\sin(\alpha \pm \beta)$ en $\cos(\alpha \pm \beta)$ worden afgeleid. Het zijn er 4: 1) eenvoudig meetkundig; 2) met coördinaten; 3) met vectoren; 4) met complexen.

I. Bij alle vier leidt men één van de formules af; niet slechts één; zoals men wel zal zien.

Uit één ervan, b.v. uit $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ vindt men gemakkelijk de andere drie.

$\cos(\alpha + \beta) = \sin\{(90^\circ - \alpha) - \beta\} = \sin(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \cos(90^\circ - \alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Neemt men β tegengesteld; dan krijgt men de andere twee formules.

II. De eerste methode is die met een figuur, waarop men α en β scherp neemt; daarna zegt men: als men α vermeerdert met 90°, dan houdt het tweede lid dezelfde vorm; met β natuurlijk ook, maar dit hoeft men niet te doen, daar α en β bij verwisseling het tweede lid hetzelfde laten.

Gegeven dus: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Te bewijzen: $\sin(\alpha + 90^\circ + \beta) = \sin(\alpha + 90^\circ)\cos\beta + \cos(\alpha + 90^\circ)\sin\beta$.

Bedenk: $\sin(\varphi + 90^\circ) = \cos\varphi$ en $\cos(\varphi + 90^\circ) = -\sin\varphi$.

Het eerste lid van het gestelde is $\sin(\alpha + 90^\circ + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$. De termen van het tweede lid worden $\cos\alpha\cos\beta$ en $-\sin\alpha\sin\beta$; dus vinden we $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Dat is: de leden blijven gelijk bij vermeerdering van een der hoeken met 90°; herhaling geeft, dat $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ voor alle hoeken geldt; dus gelden ook de andere drie, hierboven onder I bedoeld.

§ 2. 1. Met de sinusregel.

Op fig. 1 is $\alpha + \beta$ de buitenhoek bij C, de loodlijn in B op AB snijdt het verlengde van AC in P. We nemen AP als eenheid.

In II is $PC : \sin\alpha = \cos\beta : \sin(\alpha+\beta)$; in I is $CA : \cos\alpha = \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$, want $\angle C_1$ is het supplement van $\alpha+\beta$.

$$PC + CA = 1 = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

dus $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

(Wijdenes-Heyt; Goniometrie B; 14e druk.)

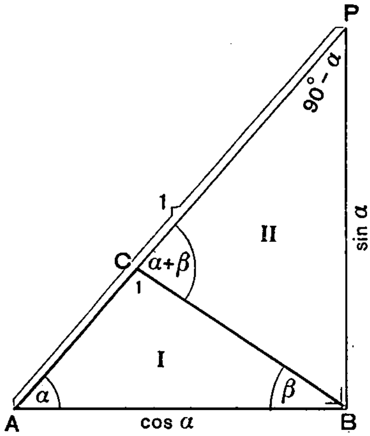


Fig. 1.

2. Met de oppervlakte van een driehoek.

Zie de driehoek van fig. 2 met de hoogtelijn uit P; we noemen de hoeken, waarin de tophoek wordt verdeeld, α en β.

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2}pq\sin(\alpha+\beta)$, van de beide delen

$$\tfrac{1}{2}pq\sin\alpha\cos\beta \text{ en } \tfrac{1}{2}pq\cos\alpha\sin\beta.$$

We vinden hiermee

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

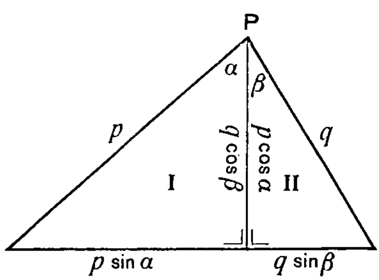


Fig. 2.

Draait men de rechtse driehoek om de hoogtelijn als as op de linkse, dan vindt men op dezelfde manier $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

(Wijdenes, Leerboek der goniometrie en trigonometrie, 10e druk § 40; verder aangeduid met *W*: G. en Tr.).

3. Met de projectie-eigenschap.

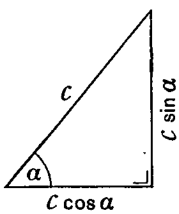


Fig. 3a.

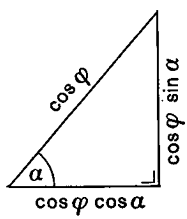


Fig. 3b.

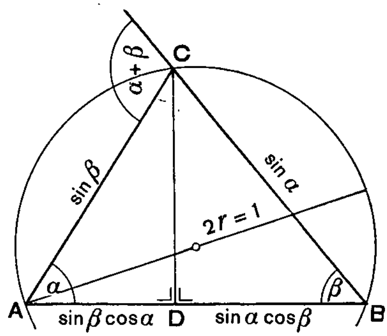


Fig. 3c.

De leerlingen eerst bijbrengen, wat er op fig. 3b staat; als de schuine zijde c is, zoals op fig. 3a, dan zijn de rechthoekszijden $c\cos\alpha$ en $c\sin\alpha$; is de schuine zijde $\cos\varphi$, zoals op fig. 3b, dan zijn ze $\cos\varphi\cos\alpha$ en $\cos\varphi\sin\alpha$.

Zie fig. 3c; voor $2r = 1$ luidt de sinusregel $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 1$; we kunnen de zijden van $\triangle ABC$ dus voorstellen door $\sin\alpha$, $\sin\beta$ en $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$; de laatste is dan de basis op fig. 3c; de projecties op de basis zijn $BD = \sin\alpha\cos\beta$ en $DA = \cos\alpha\sin\beta$; samen zijn ze $\sin(\alpha + \beta)$; dus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Draait men $\triangle CDA$ om CD als as op $\triangle CDB$, dan vindt men

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

4. Met de oppervlakte van een driehoek.

Het gaat om de oppervlakte van $\triangle OAB$; $OA = OB = 1$ en $\angle O$ van die driehoek is $\alpha + \beta$; de oppervlakte is dus $\frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta)$. $\triangle DBA$ met BD als basis vervangen we door $\triangle DBC$; dezelfde hoogte CD. De oppervlakte van $\triangle OAB$ is dus de som van de oppervlakten van de driehoeken OAD en OBC; de eerste heeft als oppervlakte $\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta$, de tweede $\frac{1}{2}\sin\beta\cos\alpha$; we vinden dus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

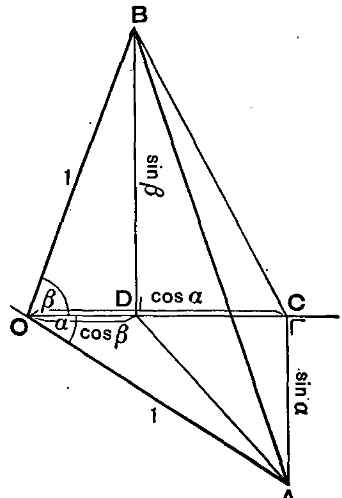


Fig. 4.

5. Met de stelling van Ptolemaeus.

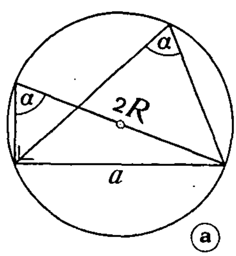


Fig. 5a. $a = 2R \sin \alpha$.

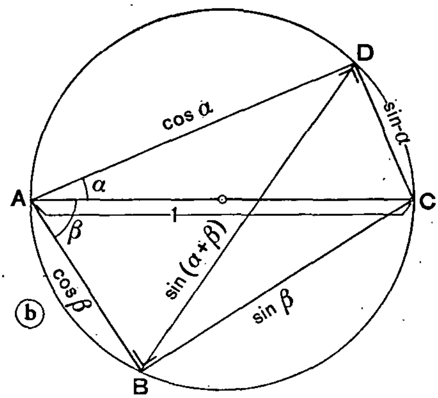


Fig. 5b.

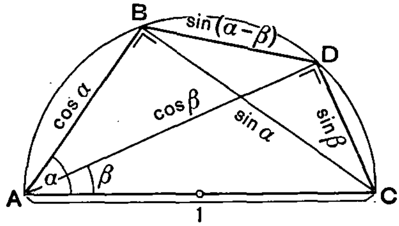


Fig. 5c.

Zie eerst fig 5a; we passen dit toe op 5b; daarop is $BD = \sin(\alpha+\beta)$; $2R$ is nl. 1; zie de vier zijden op fig. 5b. De stelling van Ptolemaeus geeft nu

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Ook is in een paar regels duidelijk, wat $\sin(\alpha - \beta)$ is; zie fig. 5c.

$\angle A(B, D) = \alpha - \beta$; volgens fig. 5a is dus $BD = \sin(\alpha - \beta)$. De stelling van Ptolemaeus geeft

$$\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha \cos\beta;$$

dus

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

(W; G. en Tr. § 43).

6. sin (α + β) en cos (α — β) als som van twee lijnstukken, sin (α — β) en cos (α + β) als verschil.

Zie fig. 6; $OA = 1$; $\alpha = \angle O(A, B) = \angle B(H, C)$; $\beta = \angle O(D, B) = \angle O(B, C)$.

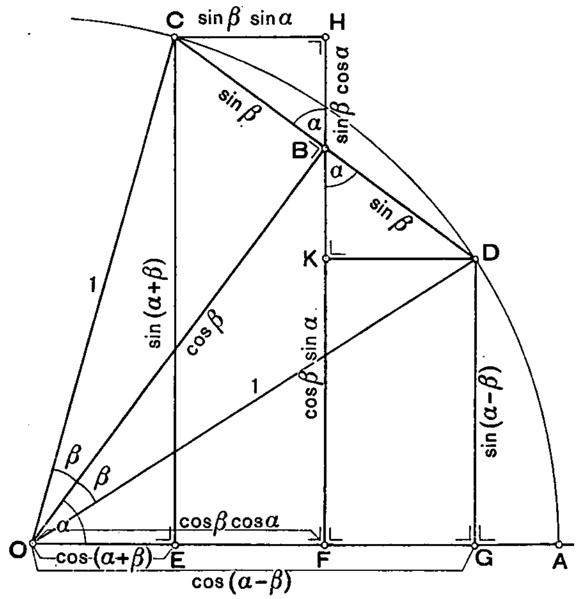


Fig. 6.

De rechthoekszijden van $\triangle OEC$ zijn $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$, die van $\triangle OGD$ zijn $\sin(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$; zie verder de rechthoekszijden van $\triangle OBF$ en van $\triangle BCH$: de beide hoeken B zijn α, omdat de benen loodrecht staan op die van $\angle O(A, B)$.

$$\sin(\alpha + \beta) = EC = FH = FB + BH = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = GD = FB - KB = FB - BH = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = OG = OF + KD = OF + CH = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(a + \beta) = OE = OF - EF = OF - CH = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Zoals men ziet, alle vier op één figuur!

Dit bewijs is uit het eerste boek over driehoeksmeting, dat mij onder de ogen kwam nl. Lobatto's leerboek der rechtlijnige en bolvormige driehoeksmeting, vierde druk, bewerkt en vermeerderd door Prof. Dr P. van Geer; 1877; ik gebruikte het voor de akte Wiskunde L.O.; 1895.

Het bewijs in het boek beslaat 1½ bladzijde; voornamelijk, omdat op de figuur niet de lengte van de lijnstukken wordt aangegeven; iets, wat men ook thans nog maar zelden ziet! Een zelfde bewijs voor de 4 formules in een schoolboek met 2 figuurtjes van 3 bij 3 cm vergt niet minder dan 3 bladzijden!

Aan het slot van het bewijs zegt het boek:

Ofschoon het voorgaande betoog eeniglijk gegrond is op het geval, waarin elk der hoeken *a* en *b* minder dan 90° is, zoo kan men zich echter, door het ontwerpen eener afzonderlijke figuur, gemakkelijk overtuigen, dat die formules insgelijks waar zijn, bijaldien men elk der hoeken van 0° tot 360° laat aangroeien en zij derhalve de vereischte algemeenheid bezitten.

7. Met gerichte lijnstukken en hoeken.

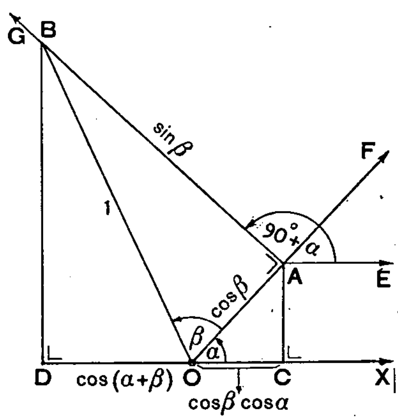


Fig. 7.

Dit bewijs is geldig voor elke α en β.

$\angle O(X, F) = \alpha$, $\angle O(F, B) = \beta$, dus is $\angle O(X, B) = \alpha + \beta$ (Chasles).

OB nemen we als eenheid; dus worden de afstanden van O tot punten op de halve lijnen OX, OF en OB positief en die tot punten op hun verlengden negatief.

A is de projectie van B op OF, C die van A op OX; de halve lijnen OX en AE zijn in gelijke zin evenwijdig; $\angle A(E, G) = 90° + \alpha$; we rekenen de afstand AB positief of negatief, naar gelang B ligt op de halve lijn AG, dan wel op haar verlengde.

Volgens Chasles geldt voor de collineaire punten O, C en D: $OD = OC + CD$; hierin is $OD = \cos(\alpha + \beta)$;

$OC = OA \cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta$,
$CD = AB\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha\sin\beta$; dus is

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

(Naar Schuh en Vollewens; Nieuw leerboek der vlakke driehoeksmeting § 37; Van Goor Zonen 's-Gravenhage 1939).

§ 3. 8. Met coördinaten.

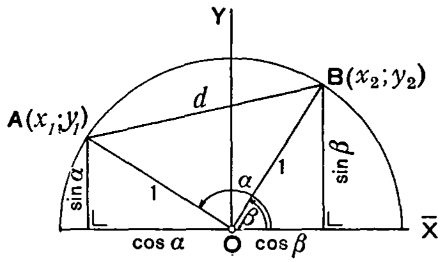


Fig. 8.

$A(x_1;\ y_1)$ en $B(x_2;\ y_2)$; $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
Deze formule kan men bekend onderstellen of, wat m.i. beter is, eerst even afleiden.

Op fig. 8 is A het punt $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ en B is $(\cos\beta;\ \sin\beta)$; voor $AB = d$ geldt:
$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 =$
$1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$.
Met de cosinusregel, toegepast op AB in $\triangle\ OAB$, vinden we $d^2 = 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$.
Gelijkstelling van de beide waarden van d^2 geeft

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

(*W*; G. en Tr. § 93).

9. P op het stelsel O(X, Y) en op O(X′, Y′).

Zie fig 9; $O(X, Y)$ hebben we over de hoek α gedraaid tot $O(X', Y')$; (maak OX' en OY' rood).

P heeft op $O(X,\ Y)$ de coördinaten:

$$1.\quad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Nu is $x = \cos(\alpha+\beta)$ en $y = \sin(\alpha+\beta)$; zetten we deze en $x' = \cos\beta$, $y' = \sin\beta$ in de betrekkingen (1), dan krijgen we

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha, \\ \sin(\alpha+\beta) = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha, \end{cases} \quad \text{dus}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

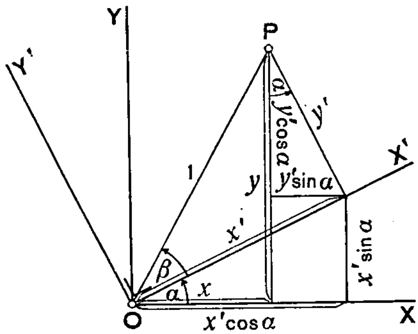


Fig. 9.

§ 4. Met de som van twee vectoren.

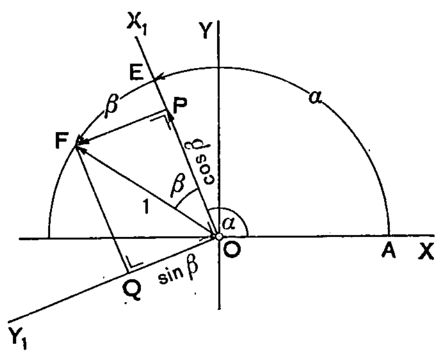


Fig. 10.

10a. Op fig. 10 is $\angle\, O(A, E) = \alpha$ en $\angle\, O(E, F) = \beta$.

Het stelsel assen OX en OY hebben we de hoek α gedraaid tot de stand OX_1 en OY_1 (maak die rood); op dat stelsel is $\overrightarrow{OP} = \cos\beta$ en $\overrightarrow{OQ} = \sin\beta$.

Nu is $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$; voor de projecties van deze drie vectoren op de x-as geldt proj. $\overrightarrow{OF}$ = proj. $\overrightarrow{OP}$ + proj. $\overrightarrow{OQ}$.

De straal van de cirkel is 1; dus is proj. $\overrightarrow{OF} = \cos(\alpha+\beta)$, proj. $\overrightarrow{OP} = \cos\beta\cos\alpha$; proj. $\overrightarrow{OQ} = \sin\beta\cos(\alpha + 90°) =$ $\sin\beta(-\sin\alpha)$. We vinden dus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Projecteert men de drie vectoren op de y-as, dan vinden we op dezelfde manier

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

(Dit bewijs volgens § 41* en § 42* uit mijn Leerboek der g. en trig. 10e druk.)

10b. De eenheid op de x-as noemen we 1, die op de y-as i; niet de i van imaginair; enkel maar ter bekorting.

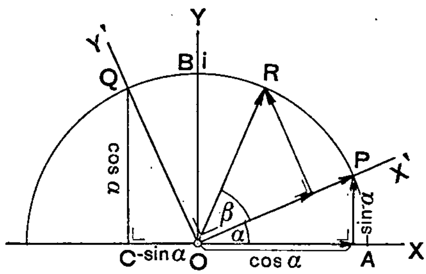


Fig. 11.

$OA = OB = 1.$ $\overrightarrow{OP} = \cos\alpha + \sin\alpha \times i = \cos\alpha + i\sin\alpha;$
$\overrightarrow{OQ} = \cos(\alpha + 90°) + i\sin(\alpha + 90°) = -\sin\alpha + i\cos\alpha;$
ook te zien in $\triangle\, OQC$.
$\overrightarrow{OR}$ is op het stelsel $O(X,Y)$ $\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$ (1).

We bepalen de plaats van R ook op het stelsel $O(X', Y')$; hierop is de horizontale eenheid $\overrightarrow{OP} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ en de vertikale $\overrightarrow{OQ} = -\sin\alpha + i\cos\alpha$. We vinden dus
$\overrightarrow{OR} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cos\beta + (-\sin\alpha + i\cos\alpha)\sin\beta =$
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$
Gelijkstelling met (1) geeft

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

§ 5. 11. Met complexen.

A is het beeldpunt van $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$; B van $\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$; het produkt heeft als scalar 1, daar OA en OB beide 1 zijn; de hoek, die het produkt van beide complexen maakt met de positieve x-as, is $\alpha + \beta$; OP is dus $\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta)$.

$$\begin{array}{l} \cos\beta + i\sin\beta \\ \underline{\cos\alpha + i\sin\alpha} \\ \times \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta); \end{array}$$

Daar uit $p + qi = r + si$ volgt $p = r$ en $q = s$, hebben we

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

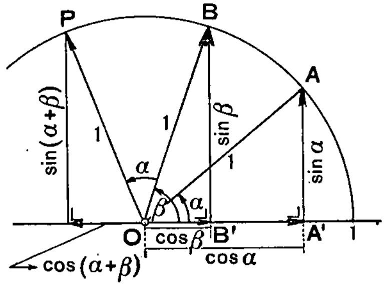


Fig. 12.

Voor de complexen zie men:
Wijdenes, Lagere Algebra I blz. 238—262; Middelalgebra I blz. 138—169 en in deel II het hoofdstuk Exponentiële en logaritmische functies van z, blz. 232—258.

De afleidingen 6—11 zijn algemeen; α en β kan men willekeurig nemen; dit is niet het geval bij 1—5; wat echter volgens II (zie het begin van dit artikel) in een regel of 4 verholpen wordt.

De bewijzen 6—11 kan men met elke α en β doen; men beperkt zich echter, *zeer terecht,* tot dezelfde hoeken als bij 1—5; de figuur is dan tot steun. Neem fig. 6 maar eens met $\alpha = 220°$ en $\beta = 115°$; een figuur als 6 leggen we er dan naast en geven de overeenkomstige hoekpunten dezelfde letters. Voor nr. 7 nemen we $\alpha = 215°$ en $\beta = 128°$; zie fig. 13.

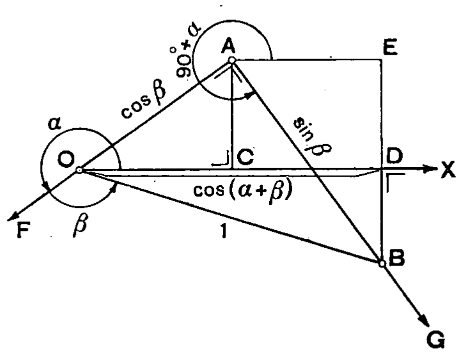


Fig. 13.

$OD = \cos(\alpha + \beta)$; $OC = \cos\beta \cos\alpha$, beide negatief.

$CD = AE = \sin\beta \cos(90^\circ + \alpha)$. Deze figuur als afschrikwekkend voorbeeld van „voor elke α en β"; fig. 7 is duidelijk en goed.

§ **6.** Misschien zijn er nog wel een paar manieren om $\sin(\alpha + \beta)$ en de andere drie uit te drukken in de sinus en de cosinus van α en β; ik weet er niet meer; ook genoeg voor het doel, dat ik mij stelde, nl. **de verschillende bewijzen te toetsen aan hetgeen bereikbaar is op de school.**

Aanleiding daartoe was het volgende: men vroeg mij, hoe ik de behandeling „met vectoren" vond; met $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_x'}$ en $\vec{e_y'}$ uit een schoolboek. Nadat ik het geval had nagegaan, maakte ik fig. 11 met volkomen hetzelfde bewijs, maar leesbaar en op een figuur te volgen. Van de vectoren in het bedoelde bewijs en in het hele boek alleen maar $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ en $\bar{a} \perp \bar{b}$; zie fig. 11 en niet fig. 45 uit het boek.

Nr. 8 eist $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$; dit wordt dan bekend ondersteld of eerst afgeleid; daarna met de cosinusregel; veel gereken, wat niet nodig is. Als men de coördinaten te hulp wil roepen, dan gaat het toch veel eenvoudiger met 9.

Nr. 10 eist bekendheid met het begrip: som van twee vectoren; 10, eenvoudig, kort en klaar; maar waarom zouden we de vectoren er bijhalen? 10b m.i. in geen geval; volstrekt onnodig om makkelijkheden moeilijk te maken.

Nr. 11 met het produkt van twee complexen; dat zijn niet anders dan twee vectoren, die een rechte hoek met elkaar maken (ook in 10b); simpel, maar op school niet doen.

Voor de school doe men een keuze uit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9; alle zeer eenvoudig; voor 5 moet men stelling van Ptolemaeus kennen; deze behoort niet meer tot de leerstof; jammer genoeg. *In geen geval neme men* 7, 8, 10 *of* 11.

Ik haal hier aan, waarmee onze collega Wigand uit Krefeld op 28 dec. 1961 voor Wimecos zijn rede eindigde:

In Hinblick auf die beschränkte Stundenzahl und die praktischen Bedürfnisse soll das Neue nicht in Form geschlossener Gebiete übernommen werden. Die neuen Begriffe und Denkweisen sollen allmählich dort in den Unterricht einfließen, wo sie helfen,

besser zu verstehen,
klarer zu denken,
vorteilhafter zu rechnen,
einfacher und schneller zu arbeiten.

EEN OPZIENBAREND BOEK

door

Dr. P. G. J. Vredenduin
(Oosterbeek)

In november 1963 verscheen: Papy, Mathématique moderne 1, uitgave Didier (Brussel), 468 blz., prijs 200 BF.

Laat ik ter introductie eerst meedelen, dat dit boek een schoolboek is. Het is bedoeld om doorgewerkt te worden de eerste anderhalf jaar, dat leerlingen middelbaar onderwijs volgen. De schrijver is hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Brussel. Zijn vrouw is lerares in wiskunde aan de normaalschool te Berkendael-Brussel. Zij heeft vijf jaar lang met de in het boek gepresenteerde leerstof geëxperimenteerd en op grond van deze experimenten is de oorspronkelijke tekst vaak gewijzigd.

Om een indruk van de inhoud te geven, som ik hier de titels van de 24 hoofdstukken op: verzamelingen, deelverzamelingen, vereniging — doorsnede — verschil, rekenen met verzamelingen, partities (d.w.z. verdelingen van een verzameling in niet lege disjuncte deelverzamelingen), eerste beginselen van de meetkunde, relaties, eigenschappen van relaties, samenstellen van relaties, ekwivalentierelaties, orderelaties, functies, permutaties, transformaties van het vlak, parallelprojectie en ordening, cardinaalgetallen, optellen, vermenigvuldigen, het binaire stelsel, gehele getallen, ekwipollentie (d.i. gelijkheid en evenwijdigheid van lijnstukken), translaties (en vectoren), centrale symmetrie, groepen. De bedoeling van het boek is dus te komen tot een geheel nieuwe fundering van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school.

Als men dit boek doorleest, raakt men hoe langer hoe meer onder de indruk van de didactische gaven van de auteur. Een nieuw begrip wordt veelal ingeleid met behulp van gemakkelijk verstaanbare voorbeelden uit het dagelijks leven. Eerst daarna volgt een nauwkeurige omschrijving. Opvallend is echter, dat deze omschrijving nooit resulteert in een moeilijk reproduceerbare verbale definitie, maar in een of ander schema, waarin op aanschouwelijk duidelijke manier de betekenis geïllustreerd wordt. De figuren, die dienen om de theorie toe te lichten of om vraagstukken op te geven, zijn zeer

talrijk. Ze nemen zeker de helft van de ruimte van het boek in beslag, zodat men zich over de omvang van het boek niet te zeer moet verbazen. Ze zijn uitgevoerd in driekleurendruk (rood, blauw, geel, groen, violet, oranje), hetgeen de overzichtelijkheid sterk bevordert. Moeite noch kosten zijn gespaard om deze uitgave tot een welverzorgd succes te maken. Ik zou dan ook elke wiskundeleraar willen aanraden van dit boek kennis te nemen. Niet alleen, dat hij kan genieten van een ongekend fraai stuk didactiek, maar het zou me bovendien niet verwonderen, als hij er menig ding in vond, dat hem niet bekend was, of als bij bekende dingen in voor hem nieuwe samenhang leerde zien. Ik ben me ervan bewust, dat een leraar niet gauw vijftien gulden zal willen uitgeven voor een schoolboek. Nu verschijnt over een paar maanden (d.w.z. een paar maanden na het verschijnen van de Franse uitgave) een Nederlandse vertaling, terwijl in 1964 ook een Duitse, een Engelse en een Spaanse vertaling gereed zullen komen. Ik geloof zeker, dat het aanschaffen van de Nederlandse uitgave voor de schoolbibliotheek verantwoord is. Leerlingen van de klassen 4 en hoger, die belangstelling voor wiskunde hebben, zullen er met plezier in werken. En het zal de leraar dan wel gegund zijn als eerste het boek te lenen.

Een bespreking van de inhoud in details zou te veel ruimte in beslag nemen en toch slechts een onvoldoende indruk van de kwaliteiten van het boek geven. Liever wil ik me er daarom toe bepalen enkele facetten naar voren te brengen. Als men de inhoud doorneemt, valt op, dat aan logica 12 hoofdstukken besteed zijn, aan meetkunde 6 en aan algebra 5, terwijl het slothoofdstuk over groepen een meer algemeen karakter heeft. Ik kies hieruit eerst de ontwikkeling van de beginselen van de meetkunde in de hoofdstukken 6, 11, 14 en 15. Eerst leren we enkele figuren kennen op aanschouwelijke manier: punt, rechte lijn, vierkant (open en gesloten), driehoek (idem), cirkel (idem). Al deze figuren worden gezien als verzamelingen, waarvan de elementen punten zijn. Twee rechte lijnen zijn gelijke verzamelingen of hebben een lege doorsnede, in welke beide gevallen ze evenwijdig genoemd worden, of ze hebben als doorsnede een singleton (d.w.z. één enkel element, dus één punt). Nu volgt een definitie, die in het verband van het boek heel gewoon is: onder de richting van een rechte lijn verstaat men de verzameling van de eraan evenwijdige lijnen. Waarna geconstateerd wordt: elke richting is een partitie van het vlak (d.w.z. door elk punt van een vlak gaat één lijn, die evenwijdig is aan een gegeven lijn). Dit is dus een zeer bondige moderne

formulering van het parallellenaxioma van Euclides. Van de stellingen: $A \parallel B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$ en $A \parallel B \nparallel C \Rightarrow A \nparallel C$, zijn de bewijzen nu zeer simpel. Hierna volgt de loodrechte stand, waarvan de betekenis alleen aanschouwelijk vastgelegd wordt door een papier twee keer dubbel te vouwen. Nu wordt geconstateerd: met elke richting a correspondeert één richting a', waarvoor geldt $a \perp a'$; elke lijn $A \in a$ staat loodrecht op elke lijn $A' \in a'$. Waarna gemakkelijk bewijsbaar zijn de stellingen:

bij elk punt p en elke lijn D is er één lijn P, waarvoor $p \in P \perp D$,
$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$,
$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$,
$A \perp B \perp C \Rightarrow A \parallel C$,
$A \perp B \perp C \perp D \Rightarrow A \perp D$ (d.w.z. als drie hoeken van een vierhoek recht zijn, is de vierde het ook).

En hiermee is dan het eerste hoofdstuk over de meetkunde, dat nog alleen steunt op de vijf voorgaande hoofdstukken over verzamelingen, ten einde. Men vindt er natuurlijk talrijke vraagstukken in, die de leerling de gelegenheid geven de in de voorgaande hoofdstukken verkregen kennis toe te passen.

In het hoofdstuk over orderelaties vinden we een verdere ontwikkeling van de meetkunde. Geconstateerd wordt, dat de punten op een rechte lijn zich op twee manieren totaal kunnen laten ordenen. Door middel van deze ordening kunnen lijnstuk en halve lijn gedefinieerd worden, waarna ook convexe puntverzamelingen ter sprake komen.

In het hoofdstuk over transformaties van het vlak vindt men aanvankelijk enige willekeurige toepassingen van afbeelding in het algemeen. De eerste afbeelding, die van betekenis is voor de systematische opbouw van de planimetrie, is de parallelprojectie. Deze leidt tot het bepalen van een punt door zijn coördinaten, hetgeen hier geen getallen zijn maar parallelprojecties van het punt parallel A op B en parallel B op A, waarin A en B snijdende lijnen zijn. We hebben hier dus te maken met een bijectie (omkeerbaar eenduidige toevoeging) van de punten van het vlak en de paren van een punt op A en een op B. Daarna komt aan de orde de bijectie, die door parallelprojectie de punten van een lijn op die van een andere lijn afbeeldt. Geconstateerd wordt, dat bij een dergelijke projectie de ordening van de punten hetzij bewaard hetzij omgekeerd wordt. Nu volgt een definitie van gelijkgerichte en van tegengesteld gerichte evenwijdige lijnstukken, van halfvlak, en een bewijs, dat een lijn een vlak in twee halfvlakken (plus deze lijn) verdeelt. We gaan hierbij als volgt te werk. Gegeven is een

rechte lijn D (fig. 1). We ordenen alle lijnen, die D snijden zo, dat parallelprojectie evenwijdig aan D de ordening van een lijn in die van de andere doet overgaan. We schrijven nu $x < D$, als een punt x op een lijn voorafgaat aan het snijpunt van die lijn met D. De verzameling van de punten, waarvoor $x < D$, en eveneens die, waarvoor $x > D$, heet een halfvlak.

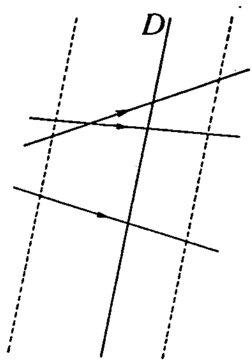


Fig. 1

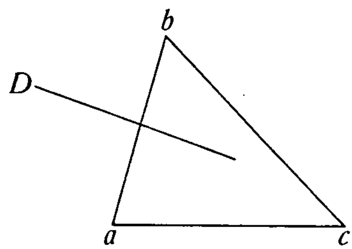


Fig. 2

Nu wordt het theorema van Pasch bewezen: als een lijn door geen enkel hoekpunt van een driehoek gaat en een van de zijden snijdt, dan snijdt de lijn ook een van de beide andere zijden. Het bewijs komt hierop neer, dat aangenomen wordt, dat de lijn D de zijde $]ab[$ snijdt (fig. 2). Dan verdeelt D de verzameling $\pi \backslash D$ (d.i. het verschil van het gehele vlak en de lijn D) in twee halfvlakken. In het ene halfvlak ligt a en in het andere b. Dus liggen hetzij a en c, hetzij b en c in verschillende halfvlakken. D snijdt in het eerste geval $]ac[$ en in het tweede $]bc[$.

Van de laatste drie hoofdstukken over de meetkunde wil ik alleen vertellen, dat de schrijver hier een zeer merkwaardig en doeltreffend bewijsmiddel toepast, nl. de bewijsfilm. Zo geeft hij van de stelling, die zegt dat ekwipollente lijnstukken ekwipollente projecties hebben, een bewijs, dat alleen bestaat uit een opeenvolging van tien figuren, die zo suggestief zijn, dat men de gang van het bewijs eruit gemakkelijker afleest en doorziet dan uit een gebruikelijk bewijs. De leerling krijgt dan als taak de figuren van een tekst te voorzien.

Thans zou ik nog iets willen meedelen over de wijze, waarop Papy de algebra fundeert. Zoals uit de inhoud blijkt, bestaat deze fundering nog alleen uit het invoeren van de gehele getallen en het uitvoeren van enkele hoofdbewerkingen. Begonnen wordt met de

definitie: twee verzamelingen E en F zijn gelijkmachtig of hebben hetzelfde cardinaalgetal, als er een bijectie $E \rightarrow F$ bestaat. We schrijven $\# E = \# F$. Daarna wordt bewezen, dat de relatie „gelijkmachtig" een ekwivalentierelatie is. Nu kan een begin gemaakt worden met het invoeren van de natuurlijke getallen. Dit geschiedt als volgt.

Alle verzamelingen, die gelijkmachtig met de lege verzameling zijn, zijn leeg.

Men noemt nul het cardinaalgetal van de lege verzameling en schrijft $0 = \# \emptyset$.

Alle singletons zijn gelijkmachtig.

Men noemt één het cardinaalgetal van de singletons. Men schrijft 1:

Dus: $1 = \# \{0\}$.

Omdat de singletons niet leeg zijn, is $0 \neq 1$. Dus is $\{0, 1\}$ een paar.

Alle paren zijn gelijkmachtig. Men noemt twee het cardinaalgetal van de paren. Men schrijft 2.

Dus: $2 = \# \{0, 1\}$.

Nu zet men de „litanie" voort:

$3 = \# \{0, 1, 2\}$,

$4 = \# \{0, 1, 2, 3\}$, enz.

„Tu admettras volontiers que les nombres 0, 1, 2, 3, . . . ainsi définis sont distincts deux à deux. Ces nombres sont appelés naturels."

De verzameling van de natuurlijke getallen schrijven we ω.

Een verzameling heet eindig, als haar cardinaalgetal een natuurlijk getal is, en oneindig, als ze niet eindig is.

Het cardinaalgetal van ω schrijven we δ.

Omdat de afbeelding $\omega \rightarrow 2\omega : x \rightarrow 2x$ een bijectie is, is $\# 2\omega = \# \omega = \delta$. De verzameling ω heeft dus hetzelfde cardinaalgetal als een van zijn echte deelverzamelingen. Ook de verzameling van de paren natuurlijke getallen blijkt het cardinaalgetal δ te hebben.

Nu bewijst de schrijver: als er een bijectieve afbeelding bestaat van een verzameling E op een echte deelverzameling F, dan is er een oneindige serie alle verschillende elementen van E, waarvoor $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \ldots$. Men ziet dit in door $a_0 \in E \backslash E$ te kiezen.

En omgekeerd, als er een afbeelding van E in E bestaat, waarbij voor een oneindige serie alle verschillende elementen geldt $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \ldots$, dan is er een bijectieve afbeelding van E op een echte deelverzameling F. We zien dit in door uit de gegeven afbeelding een nieuwe af te leiden, waarbij $a_0 \rightarrow a_1$, $a_1 \rightarrow a_2, \ldots$ en waarbij alle overige elementen van E op zichzelf afgebeeld worden.

Deze afbeelding is een bijectie van E op de echte deelverzameling $E \setminus \{a_0\}$.

Uit deze beide stellingen volgt het theorema van Dedekind: een verzameling is oneindig dan en alleen dan, als ze gelijkmachtig is met een echte deelverzameling.

Zelfs het theorema van Bernstein, dat zegt, dat uit $F \subset G \subset E$ en $\# F = \# E$ volgt $\# G = \# E$, wordt nu op eenvoudige en begrijpelijke manier bewezen. Kies daartoe een punt $a_0 \in E \setminus G$ en construeer de serie $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$. Doe dit voor alle punten $x_0 \in E \setminus G$. Laat nu al deze punten x_0 weg en de stelling is bewezen. Bedenkt u hierbij a.u.b., dat al deze bewijzen door fraaie gekleurde figuren op zodanige manier toegelicht worden, dat in de meest letterlijke manier een kind ze kan begrijpen.

Ten slotte wordt nog de ordening van cardinaalgetallen gedefinieerd.

In het volgende hoofdstuk wordt de optelling van cardinaalgetallen gedefinieerd op de volgende manier:

als $a = \# A, b = \# B$ en $A \cap B = \emptyset$, dan is $a + b = \# (A \cup B)$. Zonder moeite blijkt, dat de optelling commutatief en associatief is en 0 als neutraal element heeft.

Per definitie betekent: $\# A \leqq \# B$, dat er een bijectie van A op een deel van B bestaat. Nu volgen enige theorema's, waarin verband gebracht wordt tussen de optelling en de ordening van cardinaalgetallen:

$a \leqq c \Leftrightarrow$ er is een cardinaalgetal b, waarvoor $c = a + b$,

$a \leqq b$ en $c \leqq d \Rightarrow a + c \leqq b + d$.

De bewijzen kan men zich wel voorstellen.

Ten slotte nog een stelling, die alleen voor natuurlijke (cardinaal-) getallen geldt: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

Het produkt van de cardinaalgetallen van A en van B wordt gedefinieerd als het cardinaalgetal van het cartesisch produkt $A \times B$. De vermenigvuldiging heeft 1 als neutraal element en 0 als absorberend element (d.w.z. voor elke a geldt $0 \cdot a = 0$). Verder blijkt de vermenigvuldiging commutatief en associatief te zijn en bovendien distributief t.o.v. de optelling. En verder geldt: $a \leqq b \Rightarrow a \cdot c \leqq b \cdot c$. Hierna wordt voor natuurlijke getallen de deelbaarheidsrelatie $|$ gedefinieerd en worden enige eigenschappen ervan afgeleid.

Nu volgt een serie vraagstukken, waarin de leerling voor het eerst kennis maakt met algebraïsch rekenwerk. De schrijfwijze $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, enz. wordt ingevoerd, zonder dat over eigenschappen van machten gesproken wordt. Als typen gemaakte

vraagstukken noem ik:
$(1 + x)(1 + y)$, $(u + v + w)(x + y + z)$, $ab(1 + c)$, $(a + b)^2$, $(a + b + c)^2$, $(x + y)^3$, $(x + y + z)^3$, ontbind $ac + ad + ae + bc + bd + be$.

In totaal heb ik 15 niet uitgewerkte opgaven van deze typen aangetroffen (niet 15 nummers, die elk uit enige opgaven bestaan, maar 15 opgaven).

Nadat in een volgend hoofdstuk de duale schrijfwijze van de natuurlijke getallen verklaard is, wordt van deze schrijfwijze gebruik gemaakt om de negatieve gehele getallen in te voeren. We nemen een abacus en plaatsen daarop twee getallen, een in het rood en een in het blauw (zie fig. 3, de rode pionnen zijn door stippen, de blauwe door kruisjes voorgesteld). Elke pion stelt een cijfer 1 voor en elke open plaats een cijfer 0. Op de abacus in fig. 3 staan dus de getallen 1011001 (rood) en 1100101 (blauw). Decimaal zijn dit resp. de getallen 89 en 101.

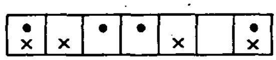


Fig. 3

Nu gaan we het volgende spel spelen. De rode pionnen mogen één vakje naar rechts verschoven worden en worden daarbij verdubbeld. Hetzelfde geldt voor de blauwe pionnen. Als in een vakje een rode en een blauwe pion komen, dan doden deze elkaar, d.w.z. we verwijderen één rode en één blauwe pion, die op hetzelfde veld staan, van de abacus. We krijgen dan de eindsituatie, die weergegeven is in fig. 4.

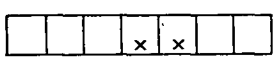


Fig. 4

„L'armée bleue a vaincu!

Si l'on additionnait le nombre défini par les survivants bleus au nombre défini par l'armée rouge initiale, on retrouverait le nombre bleu initial.

Nous dirons que la bataille décrite ci-dessus est

une addition de nombres de signes opposés.

A leur entrée sur le champ de bataille, les jetons bleus définissaient le nombre

1100101 [blauw gedrukt] [1]).

Nous signalerons que ce nombre est représenté en bleu en écrivant

$$-1100101$$

Un tel nombre est appelé *négatif*.

Les jetons rouges définissaient initialement le nombre

1011001 [rood gedrukt].

Nous signalerons que ce nombre est représenté en rouge en écrivant

$$+1011001$$

ou, par abréviation

$$1011001$$

De tels nombres sont appelés *positifs*.

Le nombre zéro est le seul pour lequel il est indifférent de le représenter par des pions rouges ou bleus.

$$0 = -0 = +0$$

Zéro est le seul nombre qui est à la fois positif et négatif.

Le résultat de la bataille décrite ci-dessus est le nombre (bleu) que nous noterons

$$-1100$$

c'est la *somme des nombres*

$$-1100101 \text{ et } +1011001."$$

De verzameling van de gehele getallen noteren we Z. De gehele getallen zijn dus de natuurlijke getallen voorzien van een teken.

Als a een willekeurig geheel getal voorstelt, dan verstaan we onder $-a$ het getal, dat uit a ontstaat door het teken (de kleur) ervan te veranderen. Hieruit volgt, dat $-(-a) = a$.

„La bataille $(-a) + (-b)$ n'est autre que la bataille $a + b$, mais les combattants ont échangés les uniformes!" En dus:

$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Ter vereenvoudiging van de notatie schrijven we ook $-a-b$ i.p.v. $(-a) + (-b)$. Zodat $-(a + b) = -a - b$.

Voor de verzameling Z worden de fundamentele eigenschappen van de optelling bewezen, t.w.

$a + b = b + a,\ a + 0 = a,\ a + (-a) = 0,$

$a + (b + c) = (a + b) + c.$

Ze volgen gemakkelijk uit de spelregels van het spel, door middel waarvan de gehele getallen ingevoerd zijn. Uit de geldigheid van deze regels volgt, dat de gehele getallen een groep vormen t.o.v.

[1]) In het boek staan grotere getallen.

de optelling, nl. de groep Z, $+$. Deze groep is commutatief. Dit is een van de plaatsen, waar de groepstructuur door de schrijver geconstateerd wordt. Een systematische behandeling van de groepen volgt eerst in het laatste hoofdstuk.

Als verkorte schrijfwijze voor $a + (-b)$ wordt vastgesteld $a - b$. Per definitie is nu $a - b$ het verschil van a en b. En daarmee is meteen de aftrekking afgehandeld.

De vermenigvuldiging wordt zo gedefinieerd, dat het produkt van twee positieve getallen overeenkomt met het produkt van de corresponderende natuurlijke getallen en dat een produkt van teken verandert, als een van de factoren van teken verandert. Commutatieve en associatieve eigenschap zijn dan direct duidelijk, de distributieve eigenschap wordt bewezen. En ten slotte wordt meegedeeld, dat de gehele getallen een ring vormen, nl. de ring Z, $+, \cdot$.

In de vraagstukken vond ik een 17-tal niet uitgewerkte opgaven over algebraïsch rekenwerk van dezelfde aard als vermeld bij de natuurlijke getallen, maar nu voorzien van min-tekens. B.v. $(x - y - 1)^2$.

Verder vinden we nog oplossingen van zeer eenvoudige eerstegraadsvergelijkingen, zoals $x + 7 = -2$. De oplossing geschiedt als volgt. De afbeelding $Z \to Z : x \to x + 7$ is een bijectie (fig. 5).

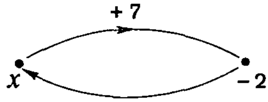


Fig. 5

Er wordt nu gevraagd, welk getal door deze afbeelding op -2 afgebeeld wordt. We stellen de inverse afbeelding op. Deze is $x \to x - 7$. De inverse beeldt -2 dus af op $-2 - 7 = -9$. „Passer de $x + 7 = -2$ à $x = -2 - 7 = -9$, c'est *résoudre l'équation* $x + 7 = -2$."

Hiermee wil ik de bespreking van de inhoud van dit boek beëindigen. Ruim 70 % is nog onbesproken gebleven. Ik heb mij beperkt tot die hoofdstukken, waarin traditionele stof op moderne manier weergegeven werd. De lezer van dit verslag krijgt dan een indruk van de manier, waarop Papy de moderne begrippen hanteert om tot een weergave van traditionele onderwerpen te komen. Uit de aard der zaak krijgt hij daarvan slechts een zeer onvolkomen indruk, maar ik hoop, dat zijn nieuwsgierigheid thans voldoende

geprikkeld is om het boek zelf ter hand te willen nemen.

Tot slot een korte kritische nabeschouwing. Papy begeeft zich met dit boek op een terrein, waar de meningen zich aan het vormen zijn, nl. het terrein van de nieuwe didactiek van de wiskunde. Op dit gebied neemt hij een extreem standpunt in en daar mogen we hem dankbaar voor zijn. Aan voorzichtige compromissen hebben we in het huidige stadium weinig, omdat we er lang niet zo veel van leren als van een radicale poging het bestaande omver te werpen. We zien dan, wat de consequenties zijn, als we lang betreden paden verlaten en het wagen een weg te zoeken in nog ongebaand terrein. Uiteraard zullen de reacties van lezers op dit werk zeer uiteenlopend zijn. De een zal in dit boek een orakel zien, een ander zal zeggen, dat het een afdoende waarschuwing is. Ik geloof, dat beiden het boek onrecht doen.

Laat ik eerst de vraag pogen te beantwoorden, waaruit het extreme bestaat, dat dit boek demonstreert. Totnogtoe waren we gewoon een ouderwets programma te behandelen, waarbij in de eerste plaats vastgesteld werd, welke onderwerpen aan de orde dienden te komen en, niet te vergeten, welke types vraagstukken op examens te verwachten waren. Primair was deze vraagstukken te kunnen maken; secundair tot zekere hoogte de manier waarop dit gebeurde. Anders gezegd: de te behandelen stof was het primaire, de wiskundige taal secundair. Natuurlijk wordt in ons onderwijs wiskundige taal verweven, maar een analyse of een systematische behandeling ervan heeft nauwelijks plaats. In het werk van Papy ziet men juist het tegengestelde. Hij plaatst een bepaalde wiskundige taal in het middelpunt van de belangstelling. Het gehele werk is erop gericht deze taal te leren spreken. Wiskundige onderwerpen, in de traditionele betekenis, worden er nog slechts betrekkelijk weinig ter sprake gebracht, en voorzover dit geschiedt, wordt de behandeling nauwgezet in de aangeleerde taal gevoerd.

Na deze uiteenzetting kan ik mijn poging tot een kritische beschouwing gemakkelijker voortzetten. Ik wil dit echter niet doen in de vorm van het geven van een mening, want daar is m.i. de tijd niet rijp voor. Ik zou liever een paar vragen willen stellen. Is het noodzakelijk deze wiskundige taal zo zeer in het centrum van de belangstelling te plaatsen, dat men aan de taal zelf enige honderden bladzijden wijdt? Is de taal niet slechts hulpmiddel om tot inzicht te komen en wordt dit hulpmiddel hier niet te veel tot doel gepromoveerd? Dreigt het gevaar, dat men de stofkeuze te veel laat bepalen door de mogelijkheid er op fraaie wijze het gebruik van een bepaalde taal door te etaleren? Ik stel deze vragen niet, omdat

ik er een positief antwoord op verlang. Ik weet zeker, dat Papy in staat zal zijn uiteen te zetten, dat ik mij geen zorgen behoef te maken. Ik zal mij over Papy's denken ook heus geen zorgen maken. Maar wel zou ik mij zorgen kunnen maken, als zijn voorbeeld op onvoorzichtige wijze nagevolgd werd. En daarom eindig ik met de opmerking: laat ieder zich verrijken door de lectuur van dit boek, laat hij zich duidelijker ervan bewust worden, welke mogelijkheden er in een nieuwe didactiek schuilen, en laat hij dan een vruchtbare synthese doen ontstaan tussen zijn eigen gezichtspunten en het nieuw verworven inzicht.

UIT DE VERSLAGEN VAN DE COMMISSIES VOOR HET STAATSEXAMEN H.B.S. — 1962 EN 1963

1962

Wiskunde I

h.b.s.-B. Allereerst zou de commissie willen verwijzen naar de verslagen van de laatste jaren. Bij het schriftelijk werk komt het over het algemeen niet meer voor, dat de grafieken van functies puntsgewijze geconstrueerd worden.

Opmerkelijk is, dat zo weinig kandidaten in staat zijn te onderzoeken of er een symmetrie-as is. Dit bleek zowel bij het schriftelijk als bij het mondeling examen. De kandidaten moeten het differentiaalquotiënt en de afgeleide functie kunnen definiëren.

Ter bepaling van uiterste waarden geeft de commissie de voorkeur aan het tekenonderzoek van de eerste afgeleide. Het gebruik van de tweede afgeleide is vaak omslachtig en kan door de examinandi niet verklaard worden.

Wiskunde II

h.b.s.-B. Het viel de commissie voor wiskunde II op, dat dit jaar weer vele kandidaten wel gebruik maakten van, maar geen duidelijke omschrijving konden geven van de meest elementaire definities en begrippen uit de stereometrie en de analytische meetkunde. Wat de stereometrie betreft kunnen de opmerkingen gemaakt in voorgaande verslagen worden herhaald. Aan die verslagen wordt kennelijk te weinig aandacht geschonken door betrokkenen. Vele kandidaten bleken bij de stereometrie nooit van de ontwikkeling van de mantel van een cilinder of kegel in een plat vlak te hebben gehoord. Hierboven kon bovendien voortdurend een verwisseling van de namen cirkelsector en cirkelsegment worden geconstateerd. In het algemeen kan men constateren, dat de planimetrie veelal verwaarloosd wordt, zodat men de eenvoudigste eigenschappen van rechthoekige driehoeken niet meer kende en evenmin de betrekkingen tussen hoeken en bogen in een cirkel. Zelfs de verzameling van de hoekpunten van de rechthoekige driehoeken met dezelfde hypothenusa was dikwijls niet meer terug te vinden. Het is gewenst, dat men het oppervlak van een driehoek kan berekenen, als de lengten van de drie zijden eenvoudige getallen zijn.

De resultaten van de mondelinge examens analytische meetkunde waren dikwijls teleurstellend. Nu dit vak voor het tweede jaar op het staatsexamen h.b.s.-B wordt geëxamineerd vallen enkele markante gebreken op in de kennis van de kandidaten, of beter gezegd gebreken in de voorbereiding voor dit examenvak.

De definities van de kegelsneden konden niet of slechts verward worden gegeven, eenvoudige meetkundige eigenschappen worden niet of weinig gekend. Bewijzen van eenvoudige formules konden niet dan met veel hulp van de examinator worden gereconstrueerd. Het tekenen van assen, toppen, asymptoten, brandpunten, richtlijnen van bijvoorbeeld $x^2 \pm 2y^2 = 8$, $y^2 = 8x$, $xy = 1$ gaf meestal al aanleiding tot grote moeilijkheden en tijdverlies, waardoor het uitwerken van een vraagstukje in het gedrang kwam.

Dat men ook planimetrisch kan bewijzen, dat raaklijnen aan kegelsneden bissectrices zijn van bepaalde hoeken, was voor vele kandidaten geheel nieuw, terwijl ook de eigenschap zelve dikwijls niet werd gekend.

Bij het bepalen van de vergelijking van een bepaalde verzameling gaf men er zich weinig rekenschap van, welke grootheid geëlimineerd moest worden, laat staan dat men besefte, wat men trachtte uit te voeren.

Het wil de subcommissie voorkomen, dat aan begripmatig werken in de analytische meetkunde meer aandacht zal moeten worden geschonken. Het kennen zonder begrip van een serie formules brengt teleurstelling. De subcommissie wijst hier bijvoorbeeld op het wel kennen van een formule als

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

terwijl de afleiding ervan veelal een probleem bleek te zijn.

Bij het bepalen van de hoek van twee krommen werd door slechts enkele kandidaten gebruik gemaakt van differentiëren, terwijl dit bij vele toepassingen voordeel kan opleveren.

Wiskunde

h.b.s.-A. Bijzondere ervaringen heeft de subcommissie niet gehad. Zij vraagt zich wel af of dit verslag zin heeft, waar de voornaamste belanghebbenden i.c. de opleiders het nooit schijnen te lezen. Het komt namelijk nog te veel voor, dat een kandidaat nooit van goniometrie heeft gehoord, hoewel hierop reeds enige jaren is gewezen. Er wordt geëxamineerd volgens het programma dat sinds 1958 geldt voor de eerste drie klassen van de hogereburgerschool.

De lineaire en kwadratische functies verdienen meer aandacht; ook het oplossen van eenvoudige ongelijkheden wordt op prijs gesteld.

De povere rekentechniek en de onwennigheid bij het bewerken en herleiden van de eenvoudigste algebraïsche vormen belemmeren vele kandidaten bij het behandelen van de problemen van de eigenlijke examenstof in de gestelde tijd. Zij zouden meer aandacht moeten schenken aan de meest elementaire wiskunde.

1963

Wiskunde

h.b.s.-A. De resultaten van het schriftelijk examen waren voor vele kandidaten niet erg gunstig. Evenals vorige jaren bleek dat de kandidaten bij het zelfstandig moeten verwerken van vraagstukken op het schriftelijk examen, grote belemmeringen ondervonden door een povere rekentechniek en veelal weinig inzicht in de aanpak van vraagstukjes.

Bij het mondeling examen kon, behalve bij kandidaten die zich al te vroeg aan het examen onderwierpen, wel enige verbetering in goed begrip en redelijk vlot hanteren van de eenvoudigste begrippen uit de algebra, meetkunde en goniometrie worden

geconstateerd. Bij het uitwerken van een vraagstukje was dan meestal toch veel leiding nodig, hetgeen overeenkwam met het bij het schriftelijk werk reeds geconstateerde gebrek.

h.b.s.-B. Algebra. Er moest worden geconstateerd dat vele kandidaten niet voldoende inzicht in de algebraïsche begrippen toonden. Dit gaf dikwijls aanleiding tot verwarringen b.v. van de begrippen functie, vergelijking en ongelijkheid, verder tot onjuiste formulering van de som van een oneindige reeks, van het differentiaalquotiënt en van de afgeleide functie.

Ook de technische vaardigheid van vele kandidaten was onvoldoende. Bij het oplossen van een ongelijkheid gingen velen op een al te mechanische wijze te werk.

Het viel ook dit jaar op dat vele kandidaten bij het vaststellen van de aard der uiterste waarde(n) van een functie weinig animo vertoonden de methode van het teken van de eerste afgeleide te kiezen. Deze methode verdient de voorkeur boven die van de tweede afgeleide.

Sommige kandidaten hadden moeite met het aantonen van de aanwezige symmetrie in de grafiek van bepaalde functies.

Ook overigens kunnen de opmerkingen van het verslag van het vorig jaar worden herhaald.

h.b.s.-B. Stereometrie. De resultaten van het schriftelijk examen wijzen o.i. duidelijk in de richting van een tekort in oefening wat betreft het maken van vraagstukken. Wij beseffen ten volle dat binnen het kader van de huidige opleidingen daaraan weinig te verbeteren zal zijn; maar wij willen het niet onvermeld laten. Eveneens menen wij te moeten aandringen op zo volledig mogelijke behandeling van het programma: scheve projectie, netwerken, het bepalen van de oppervlakte van een bolsegment waren vaak niet behandelde onderwerpen.

Anderzijds toonde het mondeling examen gelukkig aan dat velen toch beter voorbereid waren dan men uit hun schriftelijk werk zou concluderen.

Met name mogen wij verder nog wel eens aandringen op:

1. nauwkeurige kennis van fundamentele begrippen en stellingen, en
2. zorgvuldige wijze van formuleren.

Ten slotte: laten de docenten van onze examinandi er zoveel mogelijk tegen waken dat volslagen onvoldoende onderlegden toch maar examens komen doen. Het aanduiden van een punt als „stip” doet wat vreemd aan!

h.b.s.-B. Goniometrie en analytische meetkunde

Goniometrie. Het ontbrak veel kandidaten aan parate kennis; zelfs de eenvoudigste feiten konden pas via grote omwegen worden vastgesteld. Slechts een klein aantal kandidaten loste ongelijkheden als $\cos x > \frac{1}{2}$ (x in het eerste kwadrant) op een vlotte wijze op. Ook het omwerken van een produkt van twee goniometrische verhoudingen tot een som of een verschil van twee goniometrische verhoudingen leverde voor velen onoverkomelijke moeilijkheden op.

Enkele kandidaten kenden nog formules met secans α e.d., terwijl de kennis van formules, waarvan men wel op de hoogte moet zijn, ontbrak.

De aandacht wordt ook nog eens gevestigd op het feit, dat men goniometrische functies moet kunnen differentiëren en integreren, terwijl het noodzakelijk is voor het tekenen van een grafiek van zo'n functie, dat het argument in radialen wordt uitgedrukt.

Analytische meetkunde. Het erkennen van de aard van krommen, voorgesteld door hun eenvoudigste vergelijking, was voor velen te moeilijk. Dat de vergelijking

$x^2 + 2y^2 = 10$ een ellips voorstelt, was vaak een verrassing. Ook het omwerken van een wat minder eenvoudige vergelijking tot de zogenaamde middelpuntsvergelijking (zelfs bij de cirkel) bleek vaak te moeilijk. De uitdrukking „poollijn van een punt t.o.v. een kromme" was niet aan iedereen bekend; in plaats daarvan werd de benaming raakkoorde gebruikt, welke uitdrukking tekortschiet wanneer geen reële raaklijnen uit het punt aan de kromme bestaan. De begrippen „macht van een punt t.o.v. een cirkel" en „machtlijn van twee cirkels" waren soms niet bekend doordat deze onderwerpen als zijnde onbelangrijk waren overgeslagen. Het zal geen betoog behoeven, dat de sub-commissie een andere mening is toegedaan.

Berekeningen, die tot de vergelijking van een verzameling moeten voeren, geven vaak als resultaat: $x = a$ en $y = f(\lambda)$, (a constant en λ veranderlijk). Vrijwel niemand zag in, dat de uitkomst van de eliminatie van λ dan is: $x = a$.

Tot slot liet de kennis van lijnen- en cirkelbundels zeer te wensen over, speciaal wanneer de laatste door een cirkel en een rechte gegeven waren.

BOEKBESPREKING

A. Permentier en L. Verlinden, *Rekenkunde, Algebra en meetkunde III*, De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen, 1963, 666 blz.

Het boek is bestemd voor de vierde klas; de behandeling van algebra en meetkunde wijkt niet veel af van de bij ons gebruikelijke; alleen wordt er veel meer aan rekenkunde gedaan. Als voorbeeld som 5 op blz. 125: Voor het leegpompen van een put werd een eerste pomp te 8 uur 's morgens in werking gesteld en later werd nog een tweede pomp ingezet. De eerste pomp doet 32 slagen in dezelfde tijd als de tweede er 45 doet, terwijl 4 slagen van de eerste evenveel halen als 5 slagen van de tweede. Te 8 uur 's avonds van dezelfde dag is de put leeg en hebben beide pompen juist evenveel water bovengehaald. Wanneer begon de tweede pomp te werken?" Dit is dan een voorbeeld van de samengestelde regel van drieën. Verder natuurlijk verhoudingen, evenredigheden, GGD en KGV, vierkantswortels, interest rekening, ook samengestelde interest, mengsels, legeringen, gehalte enz. enz.

De algebra omvat ongeveer de stof van onze 1e en 2e klas; dit doen ze dus in één jaar. Wortels zijn beperkt tot tweedemachts-wortels. De behandeling is vrijwel gelijk aan die bij ons. Een kleine kritische opmerking: op blz. 164 staat:

„Om twee getallen met hetzelfde teken op te tellen, telt men de volstrekte waarden op en plaatst vóór de bekomen som het gemeenschappelijk teken.

Voorbeelden: $(+5) + (+2) = +7$ $\quad$ $(-5) + (-2) = -7$

Vereenvoudigde schrijfwijze: $5 + 2 = 7$; $\quad$ $-5 - 2 = -7$;"

Hoe is echter in deze laatste relatie nog een optelling te ontdekken?

Op blz. 165: „Om een getal af te trekken telt men zijn tegengestelde op.

Voorbeeld: $7 - (+2) = 7 - 2 = 5$."

Weer dezelfde vraag: $7 - 2$ is toch geen optelling? Ik weet dat deze dingen moeilijk zijn, maar zo bevredigt het niet.

De meetkunde omvat de stof van onze 2e en 3e klas HBS. Dit lijkt me veel voor één jaar! De benamingen binnen- en buitenomtrekshoek voor hoeken, waarvan het hoekpunt binnen, resp. buiten een cirkel liggen, zijn waard om over te nemen. De volgorde van de onderdelen is nogal afwijkend. Zo wordt eerst de cirkel behandeld met hoeken en bogen, koorden- en raaklijnenvierhoeken, enz.; daarna komt de gelijkvormigheid enz. De behandeling is degelijk, maar wel zeer uitvoerig. Het enige wat niet bewezen wordt is de formule voor de oppervlakte van een

cirkel. Terecht m.i., daar in deze klas het limietbegrip nog niet aan de orde moet komen.

Aan het eind van het boek staat nog een beetje stereometrie.

P. Bronkhorst

Dr. R. Broeckx, *Meetkunde der georiënteerde lijnstukken*, De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen, 1963, 163 blz.

Het boek is bestemd voor de hogere cyclus van de afdelingen Wetenschappen en Latijn + Wiskunde. Na een inleiding over vectoren, volgt een eerste toepassing op de machtlijn van twee cirkels; nu kan dus de macht ook steeds in de vorm $PA \cdot PB$ geschreven worden. Dan volgt een definitie van de deelverhouding $(ABC) = CA : CB$ als inleiding op de dubbelverhouding. Uit de inhoud noem ik dan verder: harmonische punten- en stralenviertallen, Desargues, pool en poollijn, stelling van Pascal, volledige vierhoek en vierzijde, cirkelbundels, orthogonale cirkels, lineaire meetkundige transformaties, homothetie, inversie.

Collega's die behoefte hebben ons meetkunde-onderwijs te vernieuwen, kan ik dit helder en scherp geschreven boek zeer aanraden.

P. Bronkhorst

Kenneth W. Anderson — Dick Wick Hall, *Sets, Sequences and Mappings*, Uitgave van John Wiley and Sons, Londen 1963, 184 blz., prijs 38/—.

Wanneer we dit boek alleen zouden beschouwen uit het oogpunt van de vernieuwing van ons V.H. en M.-onderwijs, dan grijpt het te hoog. Het is beter geschikt voor eerste jaars studenten en diegenen, die zich op de hoogte willen stellen van deze onmisbare onderwerpen.

De opbouw is streng gehouden, opvallend is het gebruik van, wat de schrijvers noemen de ,,contrapositieve techniek'' van bewijsvoering, de vroegtijdige invoering van een keuze axioma voor rijen; de behandeling van rijen en limieten en continuïteit, behalve op de klassieke methode, ook in b.v. topologische methoden.

Een 300-tal opgaven vindt men verspreid in de tekst.

Burgers

Albrecht/Hochmuth, *Übungsaufgaben zur höheren Mathematik dl. I*, (DM 13.80) *dl. II*, (DM 14.80), Uitgever: R. Oldenbourg-München, 2de druk.

Deel I bevat uitgewerkte opgaven over elementaire wiskunde (ongelijkheden, wortelvormen, vergelijkingen, planimetrische, stereometrische- en opgaven uit de analytische meetkunde van het platte vlak), functies van één variabele, differentiaalrekening, integraalrekening en vlakke krommen (kromming, evolute en evolvente).

Deel II: determinanten, complexe getallen, analytische meetkunde van de ruimte, functies van meer variabelen, oppervlakken en ruimtekrommen, meervoudige integralen en enkele integraalstellingen van de vectorrekening.

Deel I bevat vele aardige opgaven, die op de hoogste klassen als variatie bruikbaar zijn. Deel II is meer geschikt voor studerenden.

Burgers

Dr. F. Loonstra, *Inleiding tot de algebra*, P. Noordhoff N.V. Groningen, 1963, 2de druk, 287 blz., prijs *f* 19.50.

Deze tweede druk is gedeeltelijk een omwerking van de eerste. Hoofdstuk I bevat nu de belangrijkste begrippen uit de verzamelingsleer. (§ 11 uit de 1e druk).

Hoofdstuk II stelt de natuurlijke getallen voorop (in de eerste druk werd uitgegaan van de gehele getallen). Nieuw zijn enkele paragrafen over matrices en determinanten. Ook het hoofdstuk over groepen is iets uitgebreid, terwijl hoofdstuk VI een inleiding is over vectorruimten. Aan het eind van het boek vindt men de opgaven van het examen M.O. A van 1958 t/m 1962.

Burgers.

Agon examengidsen voor eindexaminandi gymnasium, h.b.s. en m.m.s., Agon Elsevier, Amsterdam/Brussel, 1963, Prijs *f* 2,90 per deel.

Wiskunde I (31 blz.) bevat de algebra, differentiaal- en integraalrekening. Waarom werden herleidingen van $\sqrt{A + B\sqrt{C}}$, interpolatie, complexe getallen en partiële integratie opgenomen? Dat het gevaarlijk is logaritmen te herleiden zonden *eerst* na te gaan of alle argumenten positief zijn, blijkt wel op blz. 20, waar het antwoord: $x < {}^1/_{16}$ onjuist is. Waarom moet $f'(a) = 0$, als $f(x)$ voor $x = a$ een extreem heeft?

Wiskunde II (46 blz.) omvat de planimetrie, gonio- en trigonometrie, stereometrie en analytische meetkunde. Waarom de inhoudsformules voor bolsegment en bolsector opgenomen? Wat is „het 5de kwadrant"? Waarom op blz. 33 onjuiste formules over hoogtelijnstukken en zijden van de voetpuntsdriehoek?

De eindexaminandi zullen zelf moeten beslissen of ze deze overzichten op prijs stellen. De prijs is rijkelijk hoog.

Burgers.

Handboek der wiskunde, onder redactie van dr. L. Kuipers en dr. R. Timman. Uitgever: Scheltema en Holkema N.V., Amsterdam, 1963, 854 blz., prijs *f* 79,—.

De inhoud van dit handboek stemt in belangrijke mate overeen, zo zegt het „Woord vooraf", met de leerstof zoals die in de colleges aan de Technische Rijkshogeschool te Delft aan studenten in de diverse afdelingen wordt gegeven. Als voorkennis wordt dat deel van de wiskunde ondersteld, dat op het V.H.M.O. behandeld wordt.

Aan het tot standkomen van dit forse, prachtig uitgegeven boek werkten, behalve beide bovengenoemde Delftse hoogleraren, nog mede: dr. ir. J. W. Cohen, dr. H. J. A. Duparc, dr. ir. L. Kosten, dr. F. Loonstra, dr. B. Meulenbeld, dr. C. H. van Os en dr. S. C. van Veen, allen hoogleraren in Delft en dr. J. Hemelrijk, hoogleraar te Amsterdam.

Het boek is verdeeld in 14 hoofdstukken van nogal uiteenlopende omvang. Het eerste, van de hand van dr. C. H. van Os bevat een geschiedkundig overzicht van de ontwikkeling van het getalbegrip. Hierop volgt het hoofdstuk Getallenstelsels, geschreven door dr. F. Loonstra. Uitgaande van de natuurlijke getallen, wordt door geschikt gekozen afspraken de verzameling geleidelijk uitgebreid tot die van de gehele, rationale, reële en complexe getallen. Van dezelfde auteur zijn de hoofdstukken III en IV, respectievelijk Lineaire Algebra (26 blz.) en Analytische Meetkunde (38 blz.). Deze beide hoofdstukken bevatten geen opgaven. Het zal duidelijk zijn, dan men b.v. niet „thuis kan raken" in de lineaire algebra, als men de studie beperkt tot deze 26 bladzijden. Het zijn beide knappe en overzichtelijke samenvattingen. Het valt op, dat de „transformatie-operator" niet vóór, maar achter „zijn argument" geplaatst is.

Hoofdstuk V, Analyse van dr. B. Meulenbeld behandelt in ruim 90 bladzijden

de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening, functies van twee veranderlijken en meervoudige integralen. Tussen de tekst vindt men een 60-tal uitgewerkte voorbeelden.

Getallenrijen en reeksen worden in een 40-tal bladzijden behandeld door dr. L. Kuipers. Ook hier vindt men vele (ruim 50) uitgewerkte voorbeelden in de tekst ingelast.

Functietheorie van dr. H. Duparc neemt 75 blz. in beslag. Naast uitgewerkte voorbeelden vindt men nog een 120-tal opgaven ter oplossing. De hoofdstukken VIII en IX, gewone differentiaalvergelijkingen en Bijzondere functies (zoals gamma- en beta-functies, hypergeometrische functies, functies van Legendre, Bessel o.a.) zijn door dr. S. C. van Veen geschreven.

Hoofdstuk X, Vectoranalyse en XI, Partiële differentiaalvergelijkingen zijn van de hand van dr. R. Timman. Hoofdstuk X bevat de theorie der vectoren (scalair produkt, vectorprodukt, scalartripel- en vectortripelprodukt) toegepast op de differentiaalmeetkunde (booglengte, kromtestraal), de theorie van de oppervlakken en van vectorvelden (gradiënt van een scalair; divergentie en rotatie van een vectorveld), theorema van Green-Stokes), polen en dipolen, dyaden en tensoren.

Numerieke Analyse is van dr. L. Kosten, terwijl het boek besluit met laplacetransformaties van dr. ir. J. Cohen en waarschijnlijkheidsrekening en statistiek van dr. J. Hemelrijk.

Uit de aard der zaak heeft een dergelijke samenbundeling van hoofdstukken, die elkaar soms gedeeltelijk overlappen, een enigszins tweeslachtig karakter. De ene auteur vat de theorie zonder meer compact samen, de andere neemt de lezer met voorbeelden en opgaven meer bij de hand. Verwijzing naar meer uitvoerige studieboeken kan dan ook niet uitblijven.

De eerste zes hoofdstukken en ook het laatste bevatten echter een rijke stof tot bezinning over wat we kunnen en moeten doen, om de overgang van onze leerlingen van het V.H.M.O. naar het universitaire onderwijs, althans enigszins minder schokkend te maken.

Hopelijk schrikt de prijs velen niet af tot aanschaffing van dit fraaie boek over te gaan.

Burgers.

CURSUSSEN MODERNE WISKUNDE VOOR LERAREN

Elke bevoegde wiskundeleraar is weer in de gelegenheid gesteld een aanmeldingsformulier in te vullen, dat hem tot deelnemer maakt aan de nieuwe cursus, die in september a.s. zowel te Utrecht, Groningen als Eindhoven zal worden gehouden.

Dit nummer van Euclides verschijnt te laat om nog op te wekken tot deelneming. Maar we hebben het vertrouwen, dat een dergelijke opwekking niet nodig is. Liefst ongeveer 550 collega's namen aan de cursussen in september 1963 en januari 1964 deel en het enthousiasme tijdens de cursusweken doet ons vermoeden, dat nu zeker niet minder aanmeldingen zullen worden ontvangen.

Door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde is hier veel werk verricht. Daarvoor zijn wij, leraren, zeer dankbaar. Dat Zijne Excellentie de Staatssecretaris van O. K. en W. ons opnieuw op royale wijze in de gelegenheid stelt de kennismaking met moderne wiskunde voort te zetten, stemt ons niet minder dankbaar. Wij zullen de geboden kans niet voorbij laten gaan!

AMK

KORREL CXX [1]

(dus)

In schoolboeken komt men soms het teken $\therefore$ tegen. Men spreekt dit teken uit: dus. Willen we preciezer nagaan, op welke wijze dit teken gebruikt wordt, dan moeten we allereerst vaststellen, wat in dit verband onder ‚dus' verstaan wordt. Als we in een tekst vinden

$$\begin{array}{c} A \\ \therefore B \end{array}$$

dan is (m.i.) daarmee bedoeld: A is waar en dus is B waar. Uit de aard der zaak wordt hiermee onder andere beweerd, dat B uit A volgt (dus dat $A \rightarrow B$ een ware uitspraak is). Behalve dat wordt er echter nog meer gezegd, nl. dat A waar is en dat dus ook B waar is. Het gebruik van het teken $\therefore$ is dus door het waar zijn van $A \rightarrow B$ nog niet mogelijk gemaakt. Eerst als we ook weten, dat A waar is, kunnen we van dit teken gebruik maken.

Onze leerlingen hebben vaak grote moeite met het maken van logische onderscheidingen. Het onderscheid tussen $\therefore$ en $\rightarrow$ zal voor hen een extra belasting betekenen. Men kan deze moeilijkheid voor hen wegnemen door het gebruik van het teken $\therefore$ te omzeilen. Naar mijn mening zal hun logisch inzicht hiervan geen schade hoeven te ondervinden, terwijl juist het gebruik van $\therefore$ en $\rightarrow$ naast elkaar de moeilijkheden wel eens zo zou kunnen vergroten, dat hun inzicht belemmerd wordt.

Er is echter nog een andere reden, waarom ik tegen het gebruik van $\therefore$ zou willen opponeren. Juist in meetkundeboeken komt men het symbool vaak tegen op een manier, waarop het bij nauwkeurige beschouwing niet verantwoord blijkt te zijn. Als simpel voorbeeld kies ik het bewijs van de volgende stelling.

Stelling. De hoeken van een gelijkzijdige driehoek zijn gelijk.

Gegeven. Driehoek ABC is gelijkzijdig.

Te bewijzen. $\angle A = \angle B = \angle C$.

Bewijs. (Reeds bewezen is de stelling: in een driehoek liggen tegenover gelijke zijden gelijke hoeken.)

Driehoek ABC is gelijkzijdig	Driehoek ABC is gelijkzijdig
$\therefore AB = AC$	$\therefore AC = BC$
$\therefore \angle B = \angle C$	$\therefore \angle A = \angle B$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C.$$

[1] In vroegere jaargangen (het laatst in 1955/56) werden geregeld kleine bijdragen als „Korrel" opgenomen. De redactie wil de toen afgebroken reeks weer voortzetten en zal gaarne geschikte stukjes ontvangen.

Blijkbaar gaan we er in dit bewijs van uit, dat het waar is, dat driehoek ABC gelijkzijdig is. Laten we aannemen, lezer, dat ik beweer, dat het waar is, dat driehoek ABC gelijkzijdig is en dat u het in twijfel trekt. Het is dan mijn taak u ervan te overtuigen op wiskundig verantwoorde wijze, dat mijn bewering waar is. Dat kan ik natuurlijk niet. Ik probeer me er uit te redden door te zeggen, dat ik helemaal niet wil beweren, dat driehoek ABC gelijkzijdig is, maar dat ik de onderstelling wil maken, dat dit het geval is. Maar daarmee krijgt het gehele probleem een ander logisch karakter. Ik beweer nu niet langer: driehoek ABC is gelijkzijdig en dus is $AB = AC$, enz. Maar ik zeg alleen, dat mocht driehoek ABC gelijkzijdig zijn, ook $AB = AC$ is. D.w.z. ik beweer alleen, dat: driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow AB = AC$, een ware uitspraak is. En dan is het gebruik van het symbool $\therefore$ niet meer geoorloofd.

Hoe moeten we nu de stelling en het bewijs wel lezen?

Stelling. Driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow \angle A = \angle B = \angle C$.

Gegeven en te bewijzen, hoe noodzakelijk uit didactisch oogpunt ook vaak, schrijf ik liever niet op, omdat ze juist voor ingewijden tot verwarring aanleiding kunnen geven.

Bewijs. Driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow AB = AC$
$AB = AC \rightarrow \angle B = \angle C$
driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow AC = BC$
$AC = BC \rightarrow \angle A = \angle B$
$\angle B = \angle C$ en $\angle A = \angle B \rightarrow \angle A = \angle B = \angle C$

en dus

driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow \angle A = \angle B = \angle C$.

En op de plaats van de woorden ,en dus' zou men nu met recht het symbool $\therefore$ mogen plaatsen. Maar hoe zouden we onze leerlingen dit subtiele onderscheid tussen $\therefore$ en $\rightarrow$ duidelijk kunnen maken?

Opmerking. In plaats van:

driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow AB = AC$,

is het juister te zeggen:

voor elke A, B en C geldt:

driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow AB = AC$.

Men ziet nu nog duidelijker, dat helemaal niet beweerd wordt, dat een bepaalde driehoek ABC gelijkzijdig is, maar dat A, B en C de rol van variabelen hebben. De uitspraak: driehoek ABC is gelijkzijdig $\rightarrow AB = AC$, is juist voor willekeurige puntendrietallen, net zo als $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ juist is voor willekeurige getallenparen.

P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

110. Behandel het probleem van nr. 108, indien we nu het 3e, 6e, 9e, ... getal schrappen (i.p.v. het 2e, 4e, 6e, ...).

111. Op een draaibare ronde schijf staan aan de rand in de hoekpunten van een regelmatige n-hoek n voorwerpen. We zetten één voorwerp naast de schijf, direct naast de plaats waar het op de schijf stond. Daarna draaien we de schijf over $\frac{360°}{n}$ en zetten weer een van de voorwerpen naast de schijf. We herhalen deze bewerking zo vaak, dat ten slotte alle voorwerpen naast de schijf geplaatst zijn. De opdracht is nu de voorwerpen zo te kiezen, dat geen twee voorwerpen naast de schijf op dezelfde plaats komen te staan. Voor welke waarden van n is deze opdracht uitvoerbaar? (Naar een opgave van B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

(Zie voor de opgaven het vorige nummer)

108. Als het aantal getallen een macht van 2 is, dan blijft het eerste getal over. Onderstel nu b.v., dat $n = 10$. We schrappen dan eerst de getallen 2 en 4; er blijven nu nog 8 getallen over. Hiervan blijft dan het eerste over, d.i. van de oorspronkelijke rangschikking het getal 5.

Is dus $2^k \leqq n < 2^{k+1}$, dan blijft over het getal $1 + 2(n - 2^k)$.

109. We stellen de uitspraken op de volgende manier door letters voor:

p stelt voor: Jan gaat naar de bioscoop,
q stelt voor: Gerard gaat naar de bioscoop,
r stelt voor: Jeanne gaat naar de bioscoop,
s stelt voor: Marie gaat naar de bioscoop.

De drie uitspraken, die door de vier aanwezigen gedaan zijn, kunnen we dan als volgt symbolisch weergeven:

$\neg r \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ (1)
$(p \vee q) \rightarrow \neg s$ (2)
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \rightarrow \neg r$ (3)

Op grond van deze uitspraken zijn de volgende combinaties van waarheidswaarden van p, q, r en s uitgesloten. Op de open plaatsen kan zowel 0 als 1 gezet worden.

	p	q	r	s
op grond van (1) is uitgesloten	0	0	0	
op grond van (2) is uitgesloten	1	0		1
	0	1		1
	1	1		1
op grond van (3) is uitgesloten	0	0	1	1

We zien hieruit, dat $s = 1$ onder alle omstandigheden uitgesloten is. En dus blijft Marie thuis. Dan is aan (2) en aan (3) voldaan, zodat nog alleen maar aan (1) voldaan hoeft te worden. En dat kan als Jeanne thuis blijft, maar ook als zij naar de bioscoop gaat.

Opmerking: Niet ieder zal het met mijn interpretatie van „tenzij" in (1) eens zijn. Inderdaad is ook een andere interpretatie mogelijk. Men ziet hieruit, hoe noodzakelijk het is dergelijke termen scherp te definiëren.